Prolongement de la fonction Γ

Leçons : 207, 235, 239, 245, 265

Réf. : Beck, Malick, Peyré - Objectif Agrégation p82

Prop. : Soit $P = \{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$.

Pour tout $z \in P$, on pose $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$

Alors : $\Gamma \in \mathcal{O}(P)$ et Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ qui admet un pôle simple en tout $-n \in \mathbb{Z}^-$

1) M.q. Γ est bien définie et que $\Gamma \in \mathcal{O}(P)$

a/ • $\forall z \in \mathbb{C}$, $t \mapsto t^{z-1} e^{-t} = e^{(z-1)\ln t} \cdot e^{-t}$ est mesurable sur $]0, +\infty[$

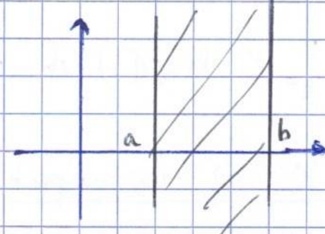
Soit $z = x + iy \in P$.

$t \to 0$: $|t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}$

donc $|t^{z-1} e^{-t}| \underset{0^+}{\sim} t^{x-1}$ intégrable car $x > 0$

$t \to +\infty$: $|t^{z-1} e^{-t}| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable

donc $\boxed{\Gamma \text{ est bien définie}}$



b/ Soient $0 < a < b$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $a \leq Re\, z \leq b$,

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leq \underbrace{t^{a-1} e^{-t} \mathbb{1}_{]0,1]}(t) + t^{b-1} e^{-t} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)}_{\text{intégrables sur }]0,+\infty[}$$

domination

et pour tout $t > 0$, $z \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc sur P

Donc, par th. d'holomorphie sous l'intégrale, $\boxed{\Gamma \in \mathcal{O}(P)}$

2) Mq $\forall z \in P$, $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$

Soit $z \in P$. $\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \, dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$

et $\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \, dt = \int_0^1 t^{z-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n \right) dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} \, dt$

à justifier

Or, $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{z+n-1} \right| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{x+n-1}}{n!} \, dt$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)} < +\infty$

$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc par th. d'interversion somme et intégrale,

$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{z+n-1} \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$

donc : $\boxed{\forall z \in P, \ \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt}$.

On pose $f : z \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$ et $g : z \longmapsto \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt$

3) M.q. $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et déterminer ses pôles

- On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$

  Alors $f_n \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et admet un pôle simple en $-n$

- Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact. Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tq $K \subset \overline{D}(0, N)$.

$\forall n > N$, f_n n'a alors pas de pôle dans K (i.e. $f \in \mathcal{O}(K)$)

et $\forall z \in K$, $|z| \leq N$

donc $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N \ (>0)$

donc $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$

$\sup_{z \in K} |f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\sum_{n>N} f_n$ CVN donc CVU sur K.

A

Γ ⑤ V1

Par théorème de CVU et méromorphie,

$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ et admet un pôle simple en tout $-n \in \mathbb{Z}^-$

4) M.q. $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

Soit $R > 0$.

$\forall z \in \mathbb{C},\ -R \leq \mathrm{Re}(z) \leq R,\ \forall t \geq 1,$

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leq \underbrace{t^{R-1} e^{-t}}_{\text{intégrable sur } [1,+\infty[} \quad \text{domination}$$

donc par théorème d'holomorphie sous l'intégrale, $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$

5) Conclure

On a : . $\Gamma \in \mathcal{O}(P)$, $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)$, $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ donc $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-)$

. $\forall z \in P,\ \Gamma(z) = f(z) + g(z)$

. P admet "un" point d'accumulation dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$ qui est connexe

donc, par th. du prolongement analytique, Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$, et $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, donc

Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et admet un pôle simple en tout $-n \in \mathbb{Z}^-$.